

分式的化简求值（加油站）

一、先化简再求值

1. 若 $x = -1$ ， $y = 2$ ，则 $\frac{2x}{x^2 - 9y^2} - \frac{1}{x - 3y}$ 的值等于（ ）。

A. 1

B. -1

C. $\frac{1}{5}$

D. $-\frac{1}{7}$

【答案】C

【解析】
$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x^2 - 9y^2} - \frac{1}{x - 3y} \\ &= \frac{2x}{(x + 3y)(x - 3y)} - \frac{x + 3y}{(x + 3y)(x - 3y)} \\ &= \frac{2x - x - 3y}{(x + 3y)(x - 3y)} \\ &= \frac{x - 3y}{(x + 3y)(x - 3y)} \\ &= \frac{1}{x + 3y} . \end{aligned}$$

当 $x = -1$ ， $y = 2$ 时，

$$\text{原式} = \frac{1}{-1 + 3 \times 2} = \frac{1}{5} .$$

【标注】【知识点】分式恒等变形

2. 先化简再求值： $\frac{a-1}{a-2} \div \frac{a^2-2a+1}{2a-4}$ ，其中 $a = -1$ 。

【答案】-1

【解析】
$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{a-1}{a-2} \cdot \frac{2(a-2)}{(a-1)^2} = \frac{2}{a-1} , \\ \text{当 } a = -1 \text{ 时, 原式} &= \frac{2}{-1-1} = -1 . \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

3. 先化简，后计算： $\frac{2x-6}{x^2-4x+4} \div \frac{3-x}{x^2+x-6} \times \frac{1}{x+3}$ ，其中 $x=1.8$ 。

【答案】10。

【解析】原式 $= \frac{2(x-3)}{(x-2)^2} \cdot \frac{(x+3)(x-2)}{3-x} \cdot \frac{1}{x+3} = -\frac{2}{x-2}$ ，当 $x=1.8$ 时，原式得 $= -\frac{2}{1.8-2} = 10$ 。

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

4. 先化简，再求值： $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) \div \frac{2}{x^2-4}$ ，其中 $x=3$ 。

【答案】 $\frac{1}{3}$ 。

【解析】原式 $= \frac{2}{x(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{x}$ ，
当 $x=3$ 时，原式 $= \frac{1}{3}$ 。

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

5. 先化简，再求值： $\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x^2-2x+1}\right) \div \frac{x}{x-1}$ ，其中 $x=3$ 。

【答案】 $\frac{3}{2}$.

【解析】 原式 = $\left[\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] \cdot \frac{x-1}{x}$
= $\left[\frac{x^2-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] \cdot \frac{x-1}{x}$
= $\frac{x^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x}$
= $\frac{x}{x-1}$,
当 $x=3$ 时, 原式 = $\frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$.

【标注】 【知识点】 分式化简求值-直接代入数值求值

6. 先化简, 再求值: $\left(\frac{a-2}{a^2+2a} - \frac{a-1}{a^2+4a+4} \right) \div \frac{a-4}{a+2}$, 其中 $a = -1$.

【答案】 $\frac{1}{a^2+2a}$, -1 .

【解析】 原式 = $\left[\frac{a-2}{a(a+2)} - \frac{a-1}{(a+2)^2} \right] \times \frac{a+2}{a-4}$
= $\frac{a^2-4-a^2+a}{a(a+2)^2} \times \frac{a+2}{a-4}$
= $\frac{1}{a^2+2a}$.
 $\because a = -1$,
 $\therefore$ 原式 = $\frac{1}{1-2} = -1$.

【标注】 【知识点】 分式化简求值-直接代入数值求值

7. 化简求值： $\left(a - \frac{a}{a+1}\right) \div \frac{a^2-2a}{a^2-4} \times \frac{1}{a+2}$ ，其中 $a=3$ 。

【答案】 $\frac{3}{4}$ 。

【解析】 原式 = $\frac{a(a+1)-a}{a+1} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a(a-2)} \cdot \frac{1}{a+2}$
 $= \frac{a^2}{a+1} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a(a-2)} \cdot \frac{1}{a+2}$
 $= \frac{a}{a+1}$ ，
 当 $a=3$ 时，原式 = $\frac{3}{4}$ 。

【标注】【知识点】分式化简求值综合

8. 先化简，再求值： $\left(\frac{3x}{x+1} - \frac{x}{x-1}\right) \div \frac{x-2}{x^2-1}$ ，其中 $x = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$ 。

【答案】 $-1 - \sqrt{3}$ 。

【解析】 原式 = $\frac{3x(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$
 $= \frac{3x^2-3x-x^2-x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$
 $= \frac{2x(x-2)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$
 $= 2x$ 。
 当 $x = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$ 时，与原式 = $\frac{2}{1-\sqrt{3}} = -1 - \sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

9. 先化简，再求值： $\frac{x^2+2x+1}{x^2+x} \div \left(2x - \frac{1+x^2}{x}\right)$ ，其中 $x = \sqrt{2} + 1$ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【解析】原式 $= \frac{x^2+2x+1}{x^2+x} \div \frac{x^2-1}{x}$
 $= \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{(x+1)(x-1)}$
 $= \frac{1}{x-1}$ 。
当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，
原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}+1-1}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

【标注】【知识点】分式化简求值-直接代入数值求值

10. 先化简，后求值： $\left(1 + \frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a+2}{a^2-1}$ ，其中 $a = \left(-\frac{2}{3}\right)^0 + 2^{-2}$ 。

【答案】 $\frac{9}{4}$ 。

【解析】

$$\begin{aligned}
 a &= \left(-\frac{2}{3}\right)^0 + 2^{-2} \\
 &= 1 + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{5}{4} . \\
 \left(1 + \frac{3}{a-1}\right) &\div \frac{a+2}{a^2-1} \\
 &= \frac{a-1+3}{a-1} \times \frac{(a+1)(a-1)}{a+2} \\
 &= a+1 ,
 \end{aligned}$$

代入

$$\text{原式} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4} .$$

【标注】【知识点】分式化简求值-条件化简求值

二、特殊思想求值

11. 如果 $x^2 + x - 5 = 0$, 那么代数式 $\left(1 + \frac{2}{x}\right) \div \frac{x+2}{x^3+x^2}$ 的值是 _____ .

【答案】 5

【解析】 $\left(1 + \frac{2}{x}\right) \div \frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{x+2}{x} \times \frac{x^2(x+1)}{x+2} = x^2 + x = 5 .$

【标注】【知识点】分式化简求值-整体代入求值

12. 已知 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4$, 则 $\frac{a-2ab-b}{2a-2b+7ab} =$ _____ .

【答案】 6

【解析】 $\because \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4 , \therefore a \neq 0 , b \neq 0 , ab \neq 0 ,$

$$\frac{a-2ab-b}{2a-2b+7ab} = \frac{\frac{a}{ab} - \frac{2ab}{ab} - \frac{b}{ab}}{\frac{2a}{ab} - \frac{2b}{ab} + \frac{7ab}{ab}} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a} - 2}{2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + 7} ,$$

 $\because \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4 ,$
 $\therefore \text{原式} = \frac{-4-2}{2 \times (-4) + 7} = \frac{-6}{-1} = 6 .$

故答案为6 .

【标注】【知识点】分式化简求值-整体代入求值

13. 已知 $\frac{xy}{x+y} = 2$ ，求代数式 $\frac{3x-5xy+3y}{-x+3xy-y}$ 的值。

【答案】 $-\frac{7}{5}$.

【解析】方法一： $\frac{xy}{x+y} = 2$ ，
 $x+y = \frac{xy}{2}$.
原式 = $\frac{3x-5xy+3y}{-x+3xy-y}$
 $= \frac{3(x+y)-5xy}{-(x+y)+3xy}$
 $= \frac{3 \cdot \frac{xy}{2} - 5xy}{-\frac{xy}{2} + 3xy}$
 $= \frac{3-10}{-1+6}$
 $= -\frac{7}{5}$.

方法二：设 $xy = 2$ ， $x+y = 1$

$\frac{3 \times 1 - 5 \times 2}{-1 + 3 \times 2} = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5}$.
故答案为： $-\frac{7}{5}$.

【标注】【知识点】分式化简求值-整体代入求值

14. 若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{7}{m+n}$ ，则 $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ 的值为 _____ .

【答案】 5

【解析】 $\because \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{7}{m+n}$ ，
 $\therefore \frac{m+n}{mn} = \frac{7}{m+n}$ ，

$$\therefore (m+n)^2 = 7mn,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{n^2 + m^2}{mn} = \frac{(n+m)^2 - 2mn}{mn} = \frac{7mn - 2mn}{mn} = 5.$$

故答案为：5.

【标注】【知识点】分式化简求值-条件化简求值

15. 已知： $2x^2 + 6x - 4 = 0$ ，求代数式 $\frac{3-x}{2x^2-4x} \div (\frac{5}{x-2} - x - 2)$ 的值.

【答案】 原代数式的值为 $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{【解析】原式} &= -\frac{x-3}{2x^2-4x} \div (\frac{5}{x-2} - \frac{x+2}{1}) \\ &= -\frac{x-3}{2x^2-4x} \div (\frac{-x^2+9}{x-2}) \\ &= \frac{1}{2x^2+6x}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } 2x^2 + 6x - 4 = 0 \text{ 时, } 2x^2 + 6x = 4,$$

$$\text{原式} = \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】分式化简求值-整体代入求值

16. 已知： $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \neq 0$ ，那么 $\frac{2x-y}{x+2y-3z}$ 的值等于 ().

A. $\frac{1}{2}$

B. 2

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

【答案】 C

$$\text{【解析】} \because \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \neq 0,$$

$$\therefore \text{设 } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0).$$

$$\text{则 } x = 3k, y = 4k, z = 5k, k \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2x-y}{x+2y-3z} &= \frac{2 \cdot 3k - 4k}{3k + 2 \cdot 4k - 3 \cdot 5k} \\ &= \frac{2 \cdot 3k - 4k}{3k + 8k - 15k} \\ &= \frac{2k - 4k}{-4k} = \frac{-2k}{-4k} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \cdot 3k - 4k}{3k + 2 \cdot 4k - 3 \cdot 5k} \\
 &= \frac{2 \cdot 3k - 4k}{3k + 2 \cdot 4k - 3 \cdot 5k} \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】分式化简求值-见比设元再代入求值

17. 如果 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \neq 0$, 那么 $\frac{x+y+z}{x+y-z}$ 的值是 () .

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【答案】C

【解析】设 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$,

则 $x = 2k, y = 3k, z = 4k$,

$$\therefore \frac{x+y+z}{x+y-z} = \frac{2k+3k+4k}{2k+3k-4k} = \frac{9k}{k} = 9.$$

故答案选C.

【标注】【知识点】分式化简求值-见比设元再代入求值

18. 若 $x - \frac{1}{x} = 3$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + 2002x^2 + 1} =$ _____ .

【答案】 $\frac{1}{2013}$

【解析】由 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9$, 得 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$,

$$\text{又} \because \frac{x^4 + 2002x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2002 = 2013,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{2013}.$$

【标注】【知识点】分式化简求值-降次化简求值

19. 已知: $x^2 + 4x - 1 = 0$, 则 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ 的值为 _____ .

【答案】 $\frac{1}{19}$

【解析】方法一: $\because x^2 + 4x - 1 = 0$,

$$\therefore x + 4 - \frac{1}{x} = 0 \quad (x \neq 0) \quad (\text{当 } x = 0 \text{ 时, 上式不成立}),$$

$$\begin{aligned}
 &\text{即} \left(x - \frac{1}{x} \right) = -4, \\
 &\therefore \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 3} \\
 &= \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 3} \\
 &= \frac{1}{(-4)^2 + 3} \\
 &= \frac{1}{16 + 3} \\
 &= \frac{1}{19}.
 \end{aligned}$$

故答案为： $\frac{1}{19}$.

$$\text{方法二：} \because x^2 + 4x - 1 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 1 = -4x.$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } x^2 - 1 = -1, -4x = 0,$$

$$\therefore x \neq 0,$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = -4,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 = (-4)^2 + 2 = 18,$$

$$\therefore \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = 18 + 1 = 19,$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{19}.$$

【标注】【知识点】分式化简求值-降次化简求值

20. 已知三个数 x, y, z 满足 $\frac{xy}{x+y} = -3, \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}, \frac{zx}{z+x} = -\frac{4}{3}$, 求 $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$ 的值 .

【答案】 -6 .

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】} &\therefore \frac{xy}{x+y} = -3, \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}, \frac{zx}{z+x} = -\frac{4}{3}, \\
 &\therefore \frac{x+y}{xy} = -\frac{1}{3}, \frac{y+z}{yz} = \frac{3}{4}, \frac{z+x}{zx} = -\frac{3}{4},
 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{3}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = -\frac{3}{4},$$

$$\text{解得: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = -\frac{1}{6},$$

$$\frac{xz + yz + xy}{xyz} = -\frac{1}{6},$$

$$\therefore \frac{xyz}{xy + yz + zx} = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = -6.$$

【标注】【知识点】分式化简求值-条件化简求值